1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-13 التعرف على خصائص متوازيات الأضلاع وتطبيقها.

الدرس 2-13 التعرف على الشروط التي تضمن أن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع. إثبات أن مجموعة من النقاط تكون متوازي أضلاع على المستوى الإحداثي.

بعد الدرس 2-13 استخدام خواص التشابه من أجل استكشاف التخمينات الخاصة بالمستطيلات وتعليلها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤالين التاليين:

- كيف قطعت أسماء كل ورقة؟ صمم رسمًا تخطيطيًا.

- كيف تحققت إيمان من أن طريقة أسماء نجحت؟ الإجابة النموذجية: يمكنها قياس كل زاوية والتأكد من أن الزوايا المتتالية متكاملة. وحيث إن هذا صحيح، فإن الأضلاع المتقابلة متوازية.

13-2 اختبارات متوازيات الأضلاع

السابق

- تعرفت على خصائص متوازيات الأضلاع وتطبيقها.

الحالي

1 التعرف على الشروط التي تضمن أن يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

2 إثبات أن مجموعة نقاط تكون متوازي أضلاع في المستوى الإحداثي.

لماذا؟

- باسمين وسهيلة تقطّعان قصاصات ورقية من ورقة لوحة إعلانات بزاوية لتكوين معرض الرواق البوصي. وسألهما أصدقاؤهما عن كيفية قطعهما للقصاصات بحيث تكون جوانبها متوازية بدون استخدام منقلة.

شرحت سهيلة أنه نظرًا لأن حافتي الورقة الأيسر والأيمن متوازيان، فلم يلزمها سوى التأكد من أن الأضلاع قُطعت على بطول واحد لضمان أن القصاصة ستشكّل متوازي أضلاع.

إثبات نظريات حول متوازيات الأضلاع

استخدام الإحداثيات لإثبات النظريات الهندسية البسيطة جبريًا.

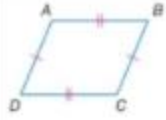
بناء فرضيات صيغية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين التفكير بطريقة شبيهة وكتابتها.

1 شروط متوازيات الأضلاع

إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متوازيين، فإنه يكون متوازي أضلاع حسب التعريف.

هذا ليس الاختبار الوحيد. ولكن يمكن استخدامه لتحديد إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

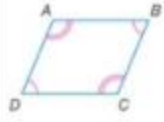
النظريات شروط متوازيات الأضلاع



13.7 إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فإن الشكل الرباعي يكون متوازي أضلاع.

الاختصار *إذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين ≅، فإن الشكل الرباعي يكون □.*

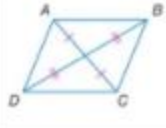
مثال إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$، فإن ABCD هو متوازي أضلاع.



13.8 إذا كان كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي متطابقتين، فإن الشكل الرباعي يكون متوازي أضلاع.

الاختصار *إذا كان كل زاويتين متقابلتين ∠ متطابقتين ≅، فإن الشكل الرباعي يكون □.*

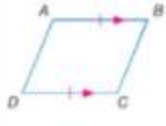
مثال إذا كان $\angle C \cong \angle A$ و $\angle D \cong \angle B$، فإن ABCD متوازي أضلاع.



13.9 إذا كان القطران في الشكل الرباعي ينصفان بعضهما، فإن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع.

الاختصار *إذا كان القطران ينصفان بعضهما، فإن الشكل الرباعي هو □.*

مثال إذا كان $\overline{AC}$ وكان $\overline{DB}$ ينصفان بعضهما، فإن ABCD متوازي أضلاع.



13.10 إذا كان ضلعان متقابلان في الشكل الرباعي متوازيين ومتطابقين أيضًا، فإن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع.

الاختصار *إذا كان هناك ضلعان متقابلان ≅ وأيضًا ||، فإن الشكل الرباعي يكون □.*

مثال إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$، فإن ABCD هو متوازي أضلاع.

سأثبت أن النظريات 13.8 و 13.10 و 13.11 في التمرينات 30 و 32 و 33 على الترتيب.

1 شروط متوازيات الأضلاع

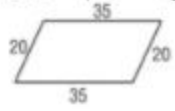
الأمثلة من 1 إلى 3 توضح كيفية استخدام النظريات الجديدة، وهي عكس النظريات في الدرس 1-8 لإثبات أن أحد الأشكال متوازي أضلاع.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

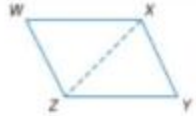
1 حدد إذا ما كان رباعي الأضلاع هو متوازي أضلاع أم لا. برر إجابتك.



إن كل زوج من أزواج الأضلاع المتقابلة متساوي في القياس. ومن ثم، فهم متطابقان. إذا كلا زوجي الأضلاع المتقابلة متطابق، فإن رباعي الأضلاع عبارة عن متوازي أضلاع.

برهان النظرية 13.7

اكتب برهانًا حرًا للنظرية 13.7.



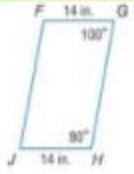
المعطيات: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$, $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$

المطلوب: WXYZ متوازي أضلاع.

فقرة البرهان:

النقطتان يحددان مستقيمًا. وبهذا يمكننا رسم مستقيم مساعد $\overline{ZX}$ لتكوين المثلث ΔZWX والمثلث ΔXYZ. من المعطيات نعلم أن $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$ و $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$. كما أن $\overline{ZX} \cong \overline{XZ}$ حسب خاصية الانعكاس في التطابق. وعلى هذا ΔZWX ≅ ΔXYZ حسب المبرهنة SSS. وحسب المبرهنة CPCTC، تكون ∠WXZ ≅ ∠YZX و ∠WZX ≅ ∠YXZ. هذا يعني أن $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ وأن $\overline{WZ} \parallel \overline{XY}$ حسب معكوس نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة. الأضلاع المتقابلة في WXYZ متوازية وبالتالي حسب التعريف فإن WXYZ متوازي أضلاع.

مثال 1 تحديد متوازيات الأضلاع



حدد إذا ما كان الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك.

الضلعان المتقابلان $\overline{FG}$ و $\overline{JH}$ متطابقان لأن لهما نفس القياس. وأيضًا بما أن ∠FGH و ∠GHJ زاويتين داخليتين متكاملتين، فإن $\overline{FG} \parallel \overline{JH}$. وعلى هذا، حسب النظرية 13.7، فإن FGHJ متوازي أضلاع.

تمرين موجّه

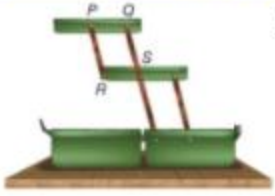
1A.

1B.

1A. نعم؛ كل ضلعين متقابلين متطابقان.
1B. لا؛ لم يجتز أيًا من اختبارات متوازيات الأضلاع.

يمكنك استخدام شروط متوازيات الأضلاع لإثبات العلاقات في مواقف من الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام متوازيات الأضلاع لإثبات العلاقات



صيد الأسماك **الرسم التخطيطي يبين منظرًا جانبيًا لصندوق معدات الصيد على اليسار. في الرسم التخطيطي، $PQ = RS$ و $QS = PR$. اشرح السبب في أن الدرجين العلوي والأوسط يظلان متوازيين بغض النظر عن الارتفاع الذي يُرفع إليه أو يُنزل إليه الدرجان.**

بما أن كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي PQSR متطابقان، فإن PQRS متوازي أضلاع حسب النظرية 13.7. وحسب تعريف متوازي الأضلاع، فإن الأضلاع المتقابلة متوازية وبهذا تكون $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$. وعلى هذا بصرف النظر عن كون الموضع الرأسي للدرجين، فإنها يظلان متوازيين دائمًا.

تمرين موجّه

2. اللافتات في المثال الموجود في بداية الدرس، اشرح السبب في أن القطع التي صنعتها باسمين و سهيلة متوازية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

الربط بالحياة اليومية

صندوق معدات صيد ثلاثي أو ثلاثي الدعامات غالبًا ما يُستخدم في ترتيب الطعوم ولوازم الصيد الأخرى. ترتفع الأدراج لأعلى وللخارج بحيث يسهل الوصول إلى كل الأغراض بالصندوق.

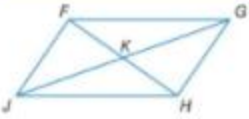
انتبه!

متوازيات الأضلاع يحتاج الشكل الرباعي لأن ينجح في أحد الاختبارات الخمسة التي تثبت كونه متوازي أضلاع. وليس هناك حاجة إلى إثبات جميع خصائص متوازي الأضلاع.

يمكنك كذلك استخدام شروط متوازيات الأضلاع بالتزامن مع الجبر لإيجاد القيم المجهولة التي تجعل من الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال 3 استخدام متوازيات الأضلاع والجبر لإيجاد القيم

إذا كان $FK = 3x - 1$ و $KG = 4y + 3$ و $JK = 6y - 2$ و $KH = 2x + 3$. فأوجد x و y بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



حسب النظرية 13.9، إذا كان قطرا الشكل الرباعي ينصفان بعضهما فإنه في هذه الحالة يكون متوازي أضلاع. إذا أوجد x بحيث تكون $FK \cong KH$ وأوجد y بحيث تكون $JK \cong KG$.

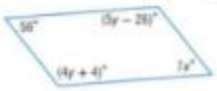
$FK = KH$	تعريف التطابق =
$3x - 1 = 2x + 3$	بالتعويض
$x - 1 = 3$	اطرح $2x$ من كل طرف.
$x = 4$	أضف 1 إلى كل طرف.
$JK = KG$	تعريف التطابق =
$6y - 2 = 4y + 3$	بالتعويض
$2y - 2 = 3$	اطرح $4y$ من كل طرف.
$2y = 5$	أضف 2 إلى كل طرف.
$y = 2.5$	اقسم الطرفين على 2.

لذا، فحينما تكون x بقيمة 4 وتكون y بقيمة 2.5، فإن الشكل الرباعي $FGHJ$ هو متوازي أضلاع.

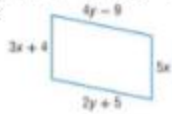
تمرين موجّه

أوجد قيمة x و y بحيث يكون كل الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع.

3A.



3B.



انتبه!

متوازيات الأضلاع في المثال 3. إذا كانت x تساوي 4، فيجب أن تكون y تساوي 2.5 حتى يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع. وبعبارة أخرى، إذا كانت x تساوي 4 وكانت y تساوي 1، فإن $FGHJ$ ليس متوازي أضلاع.

3A. $x = 8$, $y = 30$
3B. $x = 3$, $y = 7$

لقد عرفت شروط متوازيات الأضلاع. العائلة التالية تلخّص كيفية استخدام الشروط لإثبات أن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع.

ملخص المفهوم

برهن على أن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع

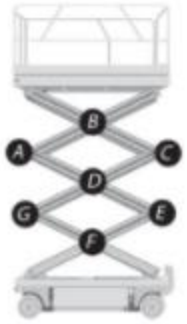
- بيان أن كل ضلعين متقابلين متوازيان. (التعريف)
- بيان أن كل ضلعين متقابلين متطابقان. (النظرية 13.7)
- بيان أن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان. (النظرية 13.8)
- بيان أن القطرين ينصفان بعضهما. (النظرية 13.9)
- بيان أن ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان في نفس الوقت. (النظرية 13.10)

التدريس المتمايز AL OL BL

المتعلّمون بالتمرين الشخصي اطلب من الطلاب اختيار زميل. اطلب من أحد الطالبين رسم متوازي أضلاع. ثم اطلب من زميله إثبات أن رباعي الأضلاع هو متوازي أضلاع. ثم اطلب من الطلاب تبادل الأدوار وكرر النشاط مرة أخرى.

مثال إضافي

2 **علم الميكانيكا** تركب الرافعات المقصية، مثل المنصة المبينة أدناه، بشكل شائع على الأدوات المصممة لحمل الأجسام الثقيلة. في الرسم التخطيطي، $\angle A \cong \angle C$ و $\angle B \cong \angle D$. اشرح السبب في أن الزوايا المتتالية ستكون دائمًا متكاملة بغض النظر عن ارتفاع المنصة.



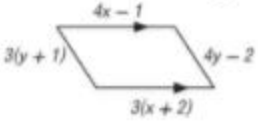
حيث إن كلا زوجي الزوايا المتقابلة للشكل الرباعي $ABCD$ متطابق، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع بحسب النظرية 13.10. وتنص النظرية 13.55 أن الزوايا المتتالية في متوازي الأضلاع تكون متكاملة. إذًا، $m\angle A + m\angle B = 180$ و $m\angle C + m\angle D = 180$. بالتعويض، $m\angle A + m\angle D = 180$ و $m\angle C + m\angle B = 180$.

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج اطلب من الطلاب ذكر طريقة بديلة يمكن استخدامها لإكمال البرهان بمناقشة الشروط الخمسة لإثبات متوازي الأضلاع. ذكّر الطلاب بأنه دائمًا ما يوجد عدة إستراتيجيات يمكن استخدامها بالرغم من استخدام إحداها يغني عن البقية.

مثال إضافي

3 أوجد قيمة x و y التي تجعل كل الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع.



$x = 7$; $y = 5$

2 متوازيات الأضلاع على المستوى الإحداثي

المثالان 4 و 5 يوضحان كيفية استخدام قوانين المستوى الإحداثي لتحديد ما إن كان الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع أم لا.

أمثلة إضافية

4 **هندسة إحداثية** مثّل الشكل الرباعي $QRST$ بيانيًا بالرؤوس $Q(-1, 3)$ و $R(3, 1)$ و $S(2, -3)$ و $T(-2, -1)$. حدد ما إن كان الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع أم لا. برر إجابتك باستخدام قانون الميل.

ميل $\overline{QR} = -\frac{1}{2}$

ميل $\overline{ST} = -\frac{1}{2}$

ميل $\overline{QT} = 4$

ميل $\overline{RS} = 4$

$QRST$ عبارة عن متوازي أضلاع بحسب التعريف.

5 اكتب إحداثيات برهان العبارة التالية. إذا كان كلا زوجي الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متطابقًا، فإن الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع.

ضع الشكل الرباعي $ABCD$ على المستوى الإحداثي بحيث $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. استخدم الشكل الرباعي $A(0, 0)$ و $B(a, 0)$ و $C(b + a, c)$ و $D(b, c)$.

المعطيات: الشكل $ABCD$ الشكل الرباعي.

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

حسب التعريف، الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع، إذا كان ضلعاه المتقابلان متوازيين. استخدم قانون الميل.

ميل $\overline{AD} = \frac{c - 0}{b - 0} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{BC} = \frac{c - 0}{b - 0} = \frac{c}{b}$

ميلا $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ يساويان 0.

حيث إن $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ لهما نفس الميل و $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ لهما نفس الميل و $\overline{CD}$، $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. إذًا الشكل الرباعي $ABCD$ عبارة عن متوازي أضلاع حيث إن أضلاعه المتقابلة متوازية.

نصيحة دراسية

قانون نقطة المنتصف

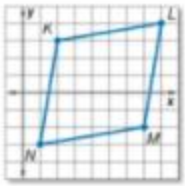
لبيان أن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع، يمكنك أيضًا استخدام قانون نقطة المنتصف. إذا كانت نقطة المنتصف في كلا القطرين عند نفس النقطة، فهذا يعني أن القطرين ينصفان بعضهما.

2 متوازيات الأضلاع على المستوى الإحداثي

المثال 4 يوضح كيفية استخدام قوانين المستوى الإحداثي لتحديد ما إن كان الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع أم لا.

مثال 4 متوازيات الأضلاع والهندسة الإحداثية

الهندسة الإحداثية مثّل الشكل الرباعي $KLMN$ الذي رؤوسه $K(2, 3)$ و $L(8, 4)$ و $M(7, -2)$ و $N(1, -3)$. عند ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا. برر إجابتك باستخدام قانون الميل.



إذا كانت الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متوازية، فإنه متوازي أضلاع.

ميل $\overline{KL} = \frac{4 - 3}{8 - 2}$ أو $\frac{1}{6}$

ميل $\overline{NM} = \frac{-2 - (-3)}{7 - 1}$ أو $\frac{1}{6}$

ميل $\overline{KN} = \frac{-3 - 3}{1 - 2} = \frac{-6}{-1}$ أو 6

ميل $\overline{LM} = \frac{-2 - 4}{7 - 8} = \frac{-6}{-1}$ أو 6

بما أن الأضلاع المتقابلة لها نفس الميل، إذا $\overline{KL} \parallel \overline{NM}$ وإذا $\overline{KN} \parallel \overline{LM}$. وبهذا، فإن $KLMN$ متوازي أضلاع حسب التعريف.

تمرين مرجعه

حدد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا. برر إجابتك باستخدام قانون المسافة أو قانون نقطة المنتصف.

4A. $A(3, 3)$، $B(8, 2)$، $C(6, -1)$، $D(1, 0)$ — انظر الهامش **4A–B**

4B. $F(-2, 4)$، $G(4, 2)$، $H(4, -2)$، $J(-2, -1)$، قانون نقطة المنتصف

في الوحدة 12، علمت أنه يمكن استخدام إحداثيات المتغيرات في تمثيل رؤوس المثلث. بعد ذلك، تم استخدام قوانين المسافة والميل ونقطة المنتصف في كتابة براهين إحداثية للنظريات. يمكن تطبيق الشيء نفسه على الأشكال الرباعية.

مراجعة المفردات

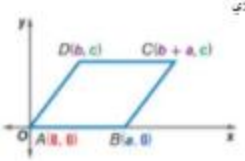
البرهان الإحداثي برهان يستخدم الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر في إثبات مفاهيم هندسية

مثال 5 متوازيات الأضلاع والبراهين الإحداثية

اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة التالية.

إذا كان زوج واحد من الأضلاع المتقابلة في شكل رباعي متوازيًا ومتطابقًا، فإن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع.

الخطة 1 ضع الشكل الرباعي $ABCD$ على المستوى الإحداثي بحيث يكون $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.



- ابدأ بوضع الرأس A عند نقطة الأصل.
- افترض أن $\overline{AB}$ طولها a من الوحدات والافتراض أن B إحداثياتها هي $(a, 0)$.
- بما أن القطع المستقيمة متوازية، فضع القطعتين الطرفيتين للقطعة $\overline{DC}$ بحيث يكون لهما نفس الإحداثي y، c.
- بحيث تكون المسافة من النقطة D إلى النقطة C هي أيضًا بعدد a من الوحدات، افترض أن الإحداثي x الذي يخص D سيكون b والذي يخص C سيكون $b + a$.

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة ماكجرو هيل التعليمية

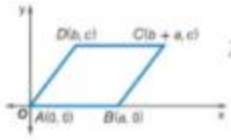
التدريس باستخدام التكنولوجيا

تمرين ويكيبيديا اجعل الطلاب يعملوا في مجموعات ثنائية ليقوموا بعمل صفحة ويكيبيديا تعرض وتشرح الطرق المختلفة المتبعة في إثبات أن رباعي الأضلاع عبارة عن متوازي أضلاع. يجب أن يتعاون الطلاب معًا في تعديل ومراجعة عملهم ليضمنوا صحته ووضوحه.

الربط بتاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت (1650-1596) رينيه ديكارت عالم رياضيات فرنسي أول من استخدم الشبكة الإحداثية. يقال إنه أول من فكر في تحديد نقطة على مستوى إحداثي باستخدام عددين وذلك حينما رأى ذبابة عالقة بالسقف ولكن هذه الحكاية مجرد خرافة.

الخطوة 2 استخدم الشكل المجاور بك في كتابة برهان.



المعطيات: الشكل الرباعي $ABCD$. فيه $\overline{AB} \cong \overline{DC}$، $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

البرهان الإحداثي:

حسب التعريف، الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية. نعلم من المعطيات أن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. إذا قمنا بإضافة خط إلى توضيح أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

استخدام قانون الميل.

ميل $\overline{AD} = \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$ ميل $\overline{BC} = \frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

بما أن $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ لهما نفس الميل، إذا $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. وعلى هذا فالشكل الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع لأن أضلاعه المتقابلة متطابقة.

تمرين موجّه

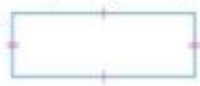
5. اكتب برهانًا إحداثيًا لهذه العبارة: إذا كان رباعي أضلاع عبارة عن متوازي أضلاع، فإن أضلاعه المتقابلة تكون متطابقة. **انظر الهامش.**

التحقق من فهمك

مثال 1 حدد إذا ما كان كل الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك.

1.

لا؛ لم يكتمل أيّ من اختبارات □.

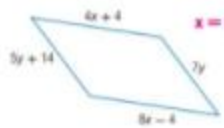
2. 
نعم؛ كل ضلعين متقابلين متطابقان.

مثال 2

3. **النجارة** يقوم راشد بصناعة طاولة ويريد أن يتأكد من أن الخياط التي تلتقي بها أرجل الطاولة مع الأرضية تكوّن متوازي أضلاع زواياه قائمة. كيف يمكن لراشد أن يستخدم ظهر الطاولة في إثبات أن الأرجل تكوّن متوازي أضلاع؟

بإمكان راشد أن يقيس ظهر الطاولة ليتأكد من أن الأضلاع المتقابلة لها طول واحد. إذا كان لها طول واحد وكانت الأرجل موجودة بزوايا ظهر الطاولة، فإن الأرجل تكوّن متوازي أضلاع.

مثال 3 **الجبر** أوجد قيمة x و y بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

4. 

$x = 2; y = 7$

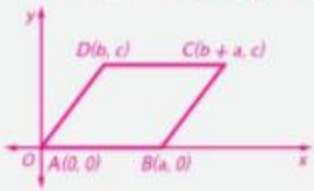
5.

$x = 30; y = 45$

حقوق الطبع © محفوظة لشركة ماكجرو هيل للتعليم

5. **المعطيات:** $ABCD$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$



البرهان الإحداثي:

$AB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2}$ or a

$DC = \sqrt{(b+a-b)^2 + (c-c)^2}$ or a

$AD = \sqrt{(c-0)^2 + (b-0)^2}$ or $\sqrt{c^2 + b^2}$

$BC = \sqrt{(a-(b+a))^2 + (c-0)^2}$

$= \sqrt{b^2 + c^2}$ or $\sqrt{c^2 + b^2}$

حيث إن $AB = DC$ و $AD = BC$. إذًا، $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.

3 التمرين

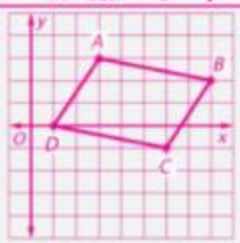
التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

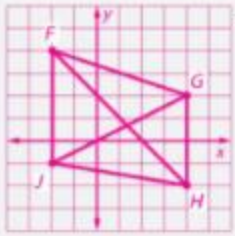
4A.



إذا كان كلا زوجي الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متطابقة، فهو عبارة عن متوازي أضلاع

$AB = \sqrt{26}$; $DC = \sqrt{26}$; $AD = \sqrt{13}$; $BC = \sqrt{13}$ حيث إن $AB = DC$ و $AD = BC$. إذًا $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. إذًا $ABCD$ متوازي أضلاع وفقًا للنظرية 13.9.

4B.



إذا كانت أقطار الشكل الرباعي تنصف بعضها البعض، فهو عبارة عن متوازي أضلاع. تنصف أقطار الشكل الرباعي بعضها البعض، إذا التقى القطران في نقطة منتصفهما. ونقطة منتصف القطر $\overline{FH} = (1, 1)$ ونقطة منتصف القطر $\overline{JG} = (1, 0.5)$. وحيث إن نقطة منتصف الأقطار $\overline{FH}$ و $\overline{JG}$ ليس لها نفس الإحداثيات، فإن الشكل الرباعي $FGHJ$ ليس بمتوازي أضلاع.

إجابات إضافية

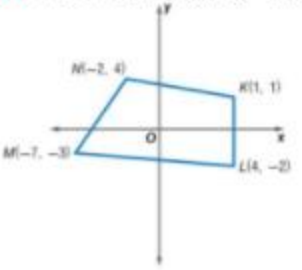
6. ليس بمتوازي أضلاع لأن نقطة منتصف $\overline{KM}$ هي $(-3, -1)$ ونقطة منتصف $\overline{NL}$ هي $(-1, -1)$. ومن ثم لا ينصّف القطران بعضهما البعض.

7. نعم، هو متوازي أضلاع لأن ميل $\overline{FG} = -\frac{1}{4}$ وميل $\overline{JH} = -\frac{1}{4}$. كذلك، ميل $\overline{HG} = 1$ وميل $\overline{JF} = 1$. إذًا، الجوانب المتقابلة للشكل الرباعي متوازية.

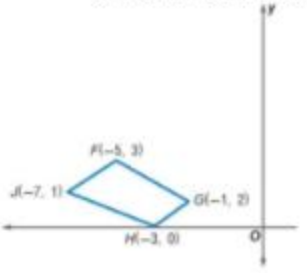
28. 4؛ محمود يمكنه قياس الجوانب المقابلة أو الزوايا المقابلة.

مثال 4 **الهندسة الإحداثية** مثّل بيانيًا كل رباعي أضلاع معطى لك برؤوسه وحدد ما إذا كان الشكل متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك باستخدام الطريقة المذكورة.

6. $K(1, 1)$, $L(4, -2)$, $M(-7, -3)$, $N(-2, 4)$؛ قانون نقطة المنتصف **6, 7. انظر الهامش.**



7. $F(-5, 3)$, $G(-1, 2)$, $H(-3, 0)$, $J(-7, 1)$؛ قانون الميل

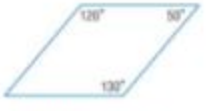


مثال 5 8. اكتب برهانًا إحداثيًا لهذه العبارة: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن قطريه ينصفان بعضهما. **انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

التمرين وحل المسائل

مثال 1 حدد إذا ما كان كل شكل رباعي هو متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك.

9.



ليس متوازي أضلاع لأن الزوايا المتقابلة غير متطابقة

10.

نعم إنه متوازي أضلاع لوجود ضلعين متقابلين متوازيين ومتطابقين

11.

نعم، كل ضلعين متقابلين متطابقين.

12.

لم تتحقق أي من اختبارات ▱

13.

لا، لم تتحقق أي من اختبارات ▱

14.

لا، لم تتحقق أي من اختبارات ▱

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	9-29, 41-43, 45-51	9-29 فردي, 46-49	10-28 زوجي, 41-43, 45,50-51
OL أساسي	9-31 فردي, 35, 37, 39, 41-43, 45-51	9,29, 46-49	31, 35-37, 39, 41-43, 45, 50-51
BL متقدم	30-51		

مثال 2

الهندسة الإحداثية مثّل بيانيًا الشكل الرباعي المعطى لك رؤوسه وحدد ما إذا كان الشكل متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك باستخدام الطريقة المذكورة. **15–18. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

15. $Q(-1, 2)$، $R(4, 3)$، $S(2, -1)$، $T(-2, -1)$، قانون الميل

16. $J(1, 4)$، $K(4, 0)$، $L(-4, -6)$، $M(-7, -2)$، قانون الميل

17. $A(-5, 8)$، $B(-3, 7)$، $C(-2, 1)$، $D(-4, 0)$، قانون المسافة

18. $V(10, 4)$، $W(15, 3)$، $X(13, 0)$، $Y(8, 1)$، قانون الميل **وقانون المسافة**

مثال 3

19. اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة، في الشكل الرباعي، إذا تطابق كل ضلعين متقابلين فإنه يكون متوازي أضلاع. **19–21. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

20. اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة، إذا كان متوازي الأضلاع يحتوي على زاوية واحدة قائمة، فإنه يحتوي على أربع زوايا قائمة.

21. **برهان** اكتب برهانًا جزءًا على النظرية 13.8

22. **السياحة** أثناء رحلتها إلى نيويورك، تريد عليمة زيارة أربع وجهات يقصدها السياح. مبنى الإمباير ستيت وتمثال الحرية وسنترال بارك وميدان تايمز سكوير. فإذا كانت إحداثيات GPS لمبنى الإمباير ستيت هي °40.74 شمالاً و°73.99 غربًا وكانت إحداثيات GPS لتمثال الحرية هي °30.69 شمالاً و °74.05 غربًا وكانت إحداثيات GPS لسنترال بارك هي °40.78 شمالاً و°73.97 غربًا وكانت إحداثيات GPS لميدان تايمز سكوير هي °40.75 شمالاً و°73.99 غربًا. فحدد ما إذا كانت هذه الوجهات الأربعة تكوّن متوازي أضلاع أم لا. **لا، فهي لا تكوّن متوازي أضلاع.**

البرهان اكتب برهانًا من عمودين. **23–25. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

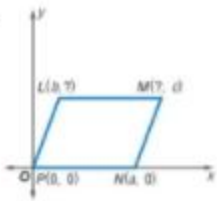
23. النظرية 13.9

24. النظرية 13.10

25. اشرح كيف يمكنك استخدام النظرية 13.9 في إنشاء متوازي أضلاع ثم قم بإنشاء متوازي أضلاع بالطريقة نفسها.

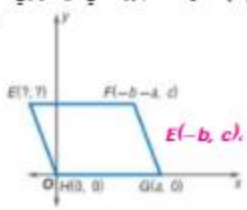
اذكر اسم الإحداثيات المجهولة في كل متوازي أضلاع.

26.



$L(b, c)$، $M(a + b, c)$

27.



$E(-b, c)$، $G(a, 0)$

28. **القيادة** يقوم محمود بطلاء خطوط لقطعة أرض مخصصة لموقف سيارات جديد. ما أقل عدد من القياسات يحتاج محمود إلى أخذها باستخدام البنطلة وشريط القياس ليضمن أن تكوّن الخطوط متوازي أضلاع؟ **انظر الهامش**

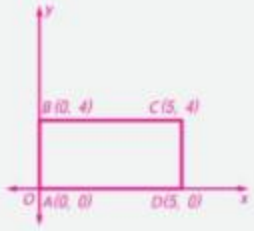
حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة هولت للنشر والتأليف

819

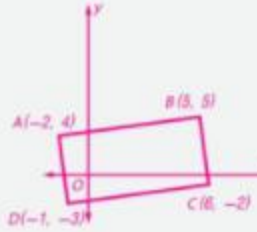
التمثيلات المتعددة
يستخدم الطلاب في التمرين 30 الرسومات الهندسية والجداول والوصف الكلامي لاستكشاف خصائص المستطيلات.

إجابات إضافية

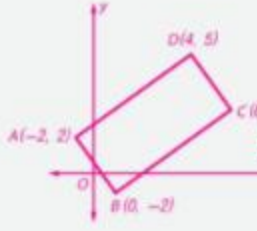
30a. الإجابة النموذجية:



مستطيل 1



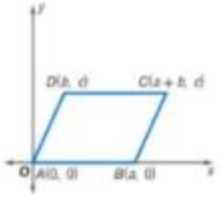
مستطيل 2



مستطيل 3

30c. الإجابة النموذجية: المستطيل هو متوازي أضلاع بأربع زوايا قائمة.

29. البرهان اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن القطرين في متوازي أضلاع يكوّنان مجموعتين من المثلثات المتطابقة.
انظر ملحق إجابات الوحدة 13.



30. التمثيلات المتعددة ستستكشف في هذه المسألة خواص المستطيلات. **انظر الهامش.**

a. هندسيًا ارسم النقاط التالية على ثلاثة مستويات إحداثية منفصلة. النقاط الأربع على كل تمثيل بياني تكوّن مستطيلاً.

المستطيل 1: A(0, 0), B(0, 4), C(5, 4), D(5, 0)

المستطيل 2: A(−2, 4), B(5, 5), C(6, −2), D(−1, 3)

المستطيل 3: A(−2, 2), B(0, −2), C(6, 1), D(4, 5)

b. جدوليًا انسخ الجدول أدناه. استخدم ميل كل من $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ و AD لإكمال الجدول.

المستطيل	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$	$m\angle D$	هل $ABCD$ متوازي أضلاع؟
المستطيل 1					
المستطيل 2					
المستطيل 3					

c. لفظيًا علّق بشأن تعريف المستطيل.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

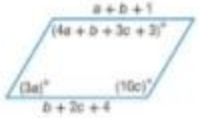
31. تحليل الخطأ تقول آمنة إن الشكل الرباعي ABCD هو متوازي أضلاع ولكن عائشة تقول إنه ليس متوازي أضلاع. فمن منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.
عائشة على صواب لأنه لم تتحقق أي من اختبارات □.

32. الكتابة في الرياضيات اشرح الطرق المختلفة لاستخدام الأضلاع المتوازية في إثبات أن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع. **إذا كانت الأضلاع المتقابلة متوازية فإن الشكل الرباعي يكون متوازي أضلاع. إذا كان ضلعين متقابلين موازيين وفي الوقت نفسه متطابقين فإن رباعي الأضلاع يكون متوازي أضلاع.**

33. تبرير إذا تطابقت الأضلاع المتقابلة الأربعة في متوازي أضلاع، فهل يتطابق متوازيا الأضلاع أحيانًا أم دائمًا أمام لا يتطابقا على الإطلاق؟ **33, 34. انظر الهامش.**

34. مسألة غير محددة الإجابة قم بوضع وتسمية متوازي أضلاع على المستوى الإحداثي بحيث لا توجد أي من رؤوسه عند نقطة الأصل.

35. تحدٍّ أوجد قيم a و b و c إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع.



$a = 20, b = 7, c = 12$

36. الكتابة في الرياضيات قارن بين النظريتين 13.5 و 13.9.
انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز

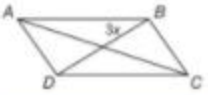
التوسع اطلب من الطلاب تعيين $P(-4, -3)$ و $L(-1, 2)$ و $S(5, 1)$ على المستوى الإحداثي. واطلب منهم تعيين وتحديد موقع النقطة الرابعة T والتي ستنشئ متوازي الأضلاع. وينبغي أن يبرهنوا أن الشكل عبارة عن متوازي أضلاع باستخدام النظريات في هذا الدرس. وتكون إحداثيات النقطة الرابعة هي $(2, -4)$. وتنشئ هذه النقطة متوازي أضلاع ويبرهن ذلك إما بقانون المسافة أو قانون الميل.
الإجابة النموذجية: ميل $\overline{PL} = \frac{5}{3}$ و $\overline{LS} = -\frac{1}{6}$ و $\overline{ST} = \frac{5}{3}$ و $\overline{TP} = -\frac{1}{6}$. وحيث إن الجوانب المتقابلة لها الميل نفسه، فإن $\overline{PL} \parallel \overline{ST}$ و $\overline{LS} \parallel \overline{TP}$. ومن ثم، فإن $PLST$ عبارة عن متوازي أضلاع بحسب التعريف.

تدريب على الاختبار المعياري

37. إذا كان الضلعان $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ في الشكل الرباعي $ABCD$ متوازيين، فأي معلومات إضافية ستكفي لإثبات أن الشكل الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع؟ **B**

A $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
C $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
B $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
D $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

38. **الإجابة القصيرة** الشكل الرباعي $ABCD$ الموضح أدناه. AC تساوي 40 كما أن BD تساوي $\frac{3}{5}AC$ تنصف $\overline{AC}$. ما قيمة x التي بها يكون $ABCD$ متوازي أضلاع؟ **4**



39. **الجير** كان متوسط السرعة التي قاد بها محمد السيارة في رحلة مدتها 5 ساعات هو 58 كيلو مترا في الساعة. خلال الساعات الثلاث الأولى قاد بسرعة 50 كيلومترا في الساعة. فكم يبلغ متوسط سرعته بالكيلومتر في الساعة خلال آخر ساعتين من الرحلة؟ **F**

F 70
H 60
G 66
J 54

40. **SAT/ACT** متوازي أضلاع رؤوسه عند النقاط (0, 0)، (3, 5)، (0, 5). ما إحداثيات الرأس الرابع؟ **E**

A (0, 3)
D (0, −3)
B (5, 3)
E (3, 0)
C (5, 0)

مراجعة شاملة

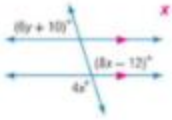
الهندسة الإحداثية أوجد إحداثيات نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي رؤوسه. (الدرس 1-3)

41. $A(-3, 5), B(6, 5), C(5, -4), D(-4, -4)$ **(1, 0.5)**
42. $A(2, 5), B(10, 7), C(7, -2), D(-1, -4)$ **(4.5, 1.5)**

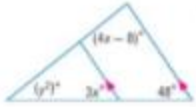
حدد ميل المستقيم الذي يمر بالنقاط التالية.

43. $J(4, 3), K(5, -2)$ **−5**
44. $X(0, 2), Y(-3, -4)$ **2**
45. $A(2, 5), B(5, 1)$ $-\frac{4}{3} \approx -1.3$

أوجد x و y في كل شكل.

46. 

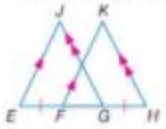
$x = 3, y \approx 26.33$

47. 

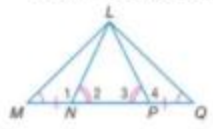
$x = 16, y = 8.7$

البرهان اكتب برهاناً من عمودين. 49 ,48. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

48. المعطيات: $\overline{EJ} \parallel \overline{FK}, \overline{JG} \parallel \overline{KH}, \overline{EF} \cong \overline{GH}$
المطلوب: $\triangle EJG \cong \triangle FKH$



49. المعطيات: $\overline{MN} \cong \overline{PQ}, \angle M \cong \angle Q, \angle 2 \cong \angle 3$
المطلوب: $\triangle MLP \cong \triangle QLN$



مراجعة المهارات

استخدم الميل لتحديد ما إذا كان XY و YZ متعامدين أم غير متعامدين.

50. $X(-2, 2), Y(0, 1), Z(4, 1)$ **غير متعامدين**
51. $X(4, 1), Y(5, 3), Z(6, 2)$ **غير متعامدين**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب كتابة فقرة توضح كيف ساعدهم الدرس حول متوازيات الأضلاع في الدرس الخاص باختبارات متوازيات الأضلاع.

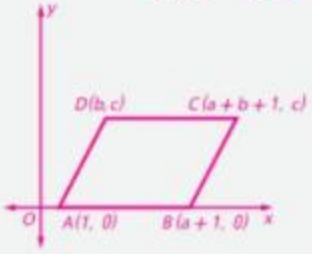
التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 2-13.

إجابات إضافية

33. في بعض الأحيان

34. الإجابة النموذجية:



التدريس المتمايز

التوسع اطلب من الطلاب رسم متوازي أضلاع على المستوى الإحداثي بالإحداثيات (0, 0) و(4, 2) و(8, 4) و(6, 0). ثم اطلب منهم أن يصلوا النقطة (4, 2) بالنقطة (0, 5) والنقطة (3, 4) بالنقطة (6, 0) والنقطة (0, 0) بالنقطة (6, 4) والنقطة (0, 2) بالنقطة (8, 4). ما الشكل الذي يكونه تقاطع القطع المستقيمة الأربع؟ متوازي أضلاع

30b. الإجابة النموذجية:

المستطيل	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$	$m\angle D$	هل $ABCD$ متوازي أضلاع؟
مستطيل 1	90	90	90	90	نعم
مستطيل 2	90	90	90	90	نعم
مستطيل 3	90	90	90	90	نعم

التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة لتقويم مدى تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

اطلب من الطلاب مراجعة الدرس الموضح للمسائل التي أجابوا عنها بشكل غير صحيح.

المعلومات منظّم الدراسة

المطويات ®دينا زايك

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار منتصف الوحدة، شجعهم على مراجعة المعلومات التي سجّلوها للدرسين 1-13 و 2-13 في مطوياتهم.

إجابات إضافية

4. الإجابة النموذجية: تأكد من أن الأضلاع المتقابلة متطابقة أو أن الزوايا المتقابلة متطابقة.

13 اختبار نصف الوحدة

الدرسان 1-13 و 2-13

استخدم $\square WXYZ$ لإيجاد كل قياس.

1. $m\angle WZY$ 75
2. WZ 24
3. $m\angle XYZ$ 105

4. **التصميم** صف طريقتين لرصفان أن قطع الباتشورك الموجودة يحكي السوار ستتلاءم مع بعضها بشكل مثالي. انظر الهامش.

الجبر أوجد قيمة كل متغير في كل متوازي أضلاع.

5. W, X, Y, Z; 8, $s-7$, 6, $2t-6$

$s = 13, t = 7$

6. J, K, M, L; $3t-6$, $56°$, $(3d-21)°$, $2f+8$

$d = 42, f = 14$

7. **البرهان** اكتب برهانا من عمودين.

المعطيات: $\square GFBA$ و $\square HACD$

المطلوب: $\angle D \cong \angle F$

انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

أوجد x و y بحيث يكون كل شكل رباعي متوازي أضلاع.

8. $x+5$, $3y+5$, $y+10$, $2x+2$

$x = 3, y = 5$

9. $3x-2$, $6y-8$, $4y+6$, $2x+6$

$x = 8, y = 7$

10. **الموسيقى** إذا تكون أرجل العازفين الجانبية متوازية ومتطابقة مرتبطة بحيث تنتصف دائما متوازية لأرضي؟

انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

11. **اختيار من متعدد** أي شكل رباعي التالية ليست متوازي أضلاع؟ D

A

C

B

D

الهندسة الإحداثية حدد ما إذا كان الشكل متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك باستخدام الطريقة المحددة.

12, 13. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

12. قانون المسافة $A(-6, -5)$، $B(-1, -4)$، $C(0, -1)$، $D(-5, -2)$

13. قانون الميل $Q(-5, 2)$، $R(-3, -6)$، $S(2, 2)$، $T(-1, 6)$

14. **الهندسة الإحداثية** أوجد إحداثيات تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(1, 3)$، $B(6, 2)$، $C(4, -2)$، و $D(-1, -1)$. (2.5, 0.5)

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education